

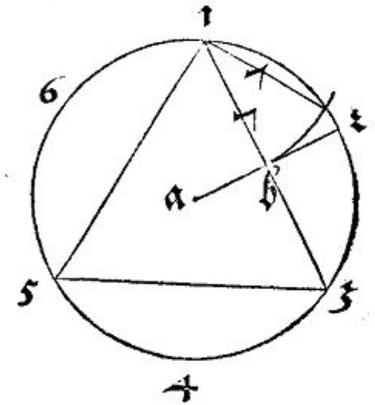
In der *Unterweysung der Messung* (1525) beschreibt Dürer die klassischen und exakten Konstruktionen von Sechseck, Quadrat und Fünfeck sowie die durch Seitenhalbierungen und Auswahl jedes zweiten Punktes möglichen Konstruktionen (Dreieck, Achteck, Zehneck, Zwölfeck usw.).

Dann aber gibt er auch Anleitungen zur Konstruktion des exakt konstruierbaren Fünfzehnecks und einiger – wie wir heute definitiv wissen – nicht exakt durch Zirkel und Lineal (exakt) konstruierbarer Figuren, die zu teilweise sehr guten Näherungen führen.

Siebeneck

Zeichnet man ein regelmäßiges Dreieck in einen Einheitskreis, so sind seine Seiten $\sqrt{3}$ lang. Deren Hälfte ergibt nach Dürers Konstruktionsanweisung die Seitenlänge des regelmäßigen Siebenecks. Sie wird per Zirkel-schlag auf den Kreis abgetragen.

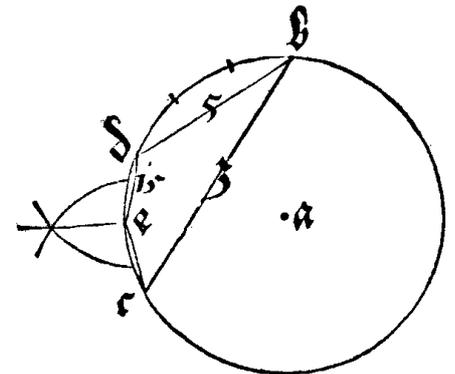
Die Abweichung beträgt nur rund 0,2 %, um die die Siebeneckseite ($2\sin(\frac{\pi}{7}) \approx 0,86776748$) länger ist als die die halbe Dreiecksseite ($\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,86602540$).



Fünfzehneck (exakt!)

Von einem Kreispunkt B aus werden auf diesen Kreis (um A) die Seiten von Dreieck ($\rightarrow C$) und Fünfeck ($\rightarrow D$) abgetragen, die auf gleichem Kreis konstruiert wurden. Der Bogen CD wird halbiert ($\rightarrow E$), é voila, CE und ED sind Seiten eines Fünfzehnecks.

Der Winkel $\sphericalangle DAB$ ist $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, der Winkel $\sphericalangle CAD$ ist 120° . Somit ist $\sphericalangle CAE = \frac{120^\circ - 72^\circ}{2} = 24^\circ$. Das ist der exakte Winkel des regelmäßigen Fünfzehnecks, denn $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$.



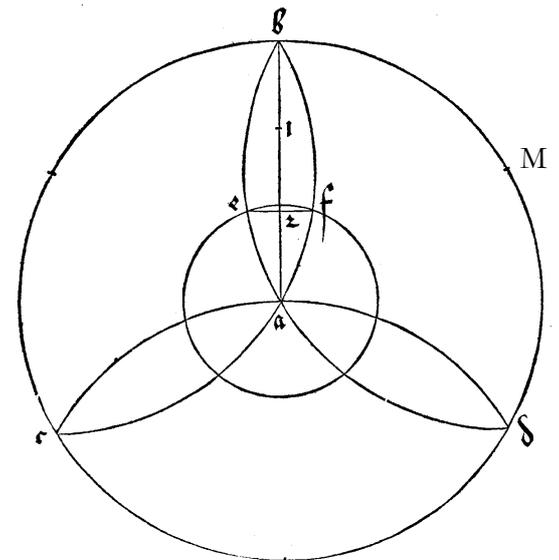
Neuneck

Ein Kreis um A wird durch sukzessives Abtragen des Radius' auf den Kreisbogen gesechstelt. Mit gleichem Radius werden von jedem zweiten Punkt aus Zirkelschläge in den Kreis gezeichnet. Es entstehen drei Linsen, Dürer nennt sie Fischblasen (*fischblasen*). Deren Spitzen auf dem Kreisbogen seien B, C und D; sie sind natürlich die übrigen Sechseckpunkte. Die Strecke AB wird gedrittelt, und mit einer waagerechten Senkrechten durch den unteren Teilpunkt die Schnitte E und F auf die Linse AB gefunden. EF sei dann die Seitenlänge des Neunecks im kleinen Kreis um A durch E und F.

Im Einheitskreis hat der Drittelkreis durch B und D mit Mitte $M(\frac{\sqrt{3}}{2} | \frac{1}{2})$ und Radius 1 die Gleichung $x^2 - \sqrt{3}x + y^2 - y = 0$. Mit $y = \frac{1}{3}$ ergeben sich die Koordinaten $E(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{36}}{6} | \frac{1}{3})$ und

$F(\frac{\sqrt{36}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} | \frac{1}{3})$. Der kleine Kreis hat damit den Radius $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{6}$. Mit $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\frac{\sqrt{36}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{6}}$ ergibt sich

$\alpha \approx 39,59407^\circ$. Das regelmäßige Neuneck hat $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$, d.h. es ergibt sich insgesamt eine Differenz von gut $3,6^\circ$ beim Abtragen von 9 dieser Strecken auf den kleinen Kreis zum Startpunkt. Oder nach anderer Rechnung: Die Strecke EF ist ca. 1% zu kurz.

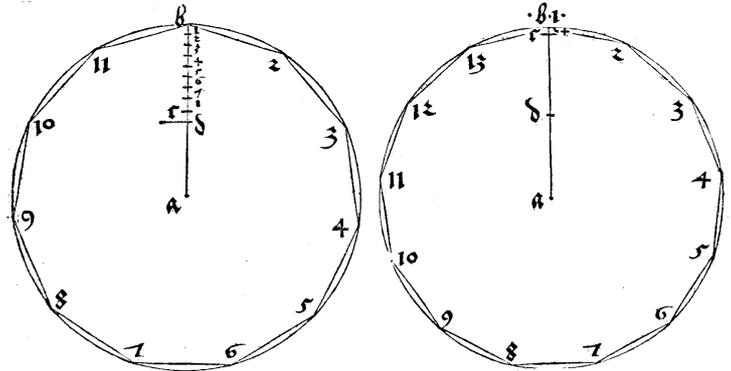


Zu Elf- und Dreizehneck räumt Dürer ein, diese Konstruktionen seien nur *Mechanice*, aber nicht *Demonstrative*, woraus wohl zu schließen ist, daß er die vorgenannten Konstruktionen für erwiesen exakt hielt. (Beweise führt er allerdings nicht vor, wie grundsätzlich nicht in der Unterweisung, die als eine praktische Anleitung gedacht ist und nicht als ein mathematisches Werk wie etwa Euklids Elemente, ein Werk, das er kannte).

Elf- und Dreizehneck

Die beiden Konstruktionen beruhen auf der Halbierung des Kreisradius' bzw. dessen zusätzlicher Achtelung.

$\frac{2}{16}$ des Radius' (also die Strecke BC) ergebe die Seitenlänge des Elfecks, die Hälfte des Radius' (BD bzw. AD) die Seitenlänge des Dreizehnecks.



Das Elfeck im Einheitskreis hat die Seitenlänge $2 \sin(\frac{\pi}{11}) \approx 0,563465$; wofür $\frac{2}{16} = 0,5625$ keine schlechte Näherung ist (0,17% zu kurz).

Beim Dreizehneck ist $2 \sin(\frac{\pi}{13}) \approx 0,47861$, Dürers Vorschlag mit 0,5 (also 4,46% zu lang) enttäuscht in Anbetracht seiner sonstigen Näherungslösungen. Das mag Dürer auch so empfunden haben.