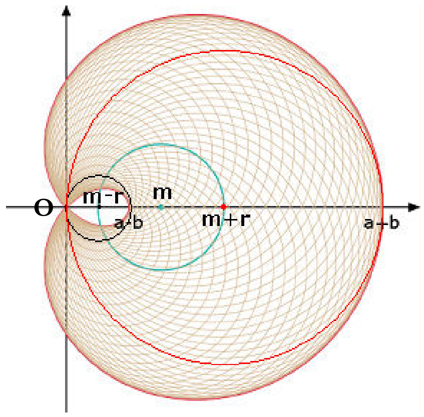
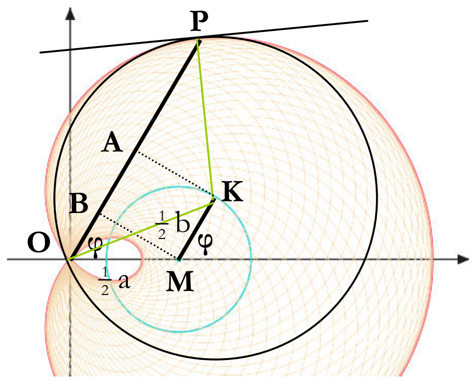
Die Pascalsche Schnecke als Enveloppe (Einhüllende) von Kreisen



Es sei ein Kreis gegeben mit Mittelpunkt $M(m\,|\,0)$ $(m\geq 0)$ und Radius r. K sei ein beliebiger Punkt auf dem Kreis. Alle Kreise um P, die durch den Ursprung O gehen, hüllen die Pascalsche Schnecke ein.

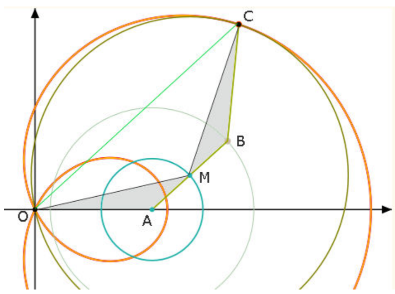
Die Pascalsche Schnecke hat die Polargleichung $\varrho(\varphi) = a\cdot\cos(\varphi) + b$, das sind die Abstände der Kurvenpunkte zum Ursprung, abhängig vom Winkel φ, den der Abstandsvektor gegen die x-Achse gedreht ist.
Die kleine Schleife der „Schnecke" schneidet die x-Achse bei $a-b$, die große bei $a+b$, wie man leicht mit $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ $(= 180°)$ nachrechnet.

Die Lage (genauer: m) und der Radius r des erzeugenden Kreises ergeben sich recht einfach aus den beiden rechts in einer gemeinsamen Graphik dargestellten Situationen, bei denen K auf der x-Achse liegt.
Für den roten Kreis mit Mittelpunkt $(m+r\,|\,0)$ muß offensichtlich gelten: $m + r = \frac{1}{2}(a + b)$ (I)
Für den schwarzen Kreis mit Mittelpunkt $(m-r\,|\,0)$ analog: $m - r = \frac{1}{2}(a - b)$ (II)
Addiert man I+I, erhält man: $2m = a \;\Rightarrow\; m = \frac{1}{2}a$.
Subtrahiert man I–II, erhält man: $2r = b \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{2}b$.



Für den allgemeinen Fall (siehe dazu die 2. Abb.) ist zunächst zu zeigen, daß $|KP| = |OK|$ gilt, falls $|OP| = a\cos(\varphi)+b$ ist, was wir voraussetzen.
Das ist genau dann der Fall, wenn die beiden rechtwinkligen Dreiecke OKA und KPA kongruent sind, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn A die Strecke OP halbiert.
(A ist der Lotpunkt von K auf OP. B sei zusätzlich der Lotpunkt von M auf OP).

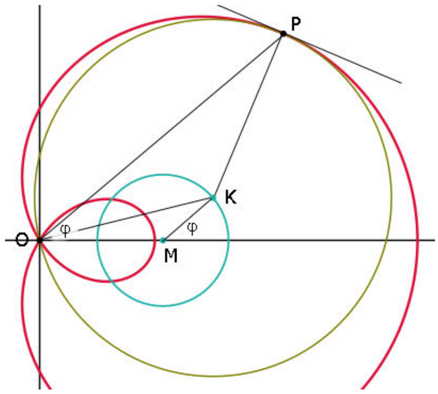
Da $|OM| = \frac{1}{2}a$, ist $|OB| = \frac{1}{2}a\cos(\varphi)$.
Wegen $|MK| = \frac{1}{2}b$ (Radius des erzeugenden Kreises), ist auch $|BA| = \frac{1}{2}b$.
Damit ist $|OA| = |OB| + |BA| = \frac{1}{2}a\cos(\varphi) + \frac{1}{2}b$, also tatsächlich die Hälfte von $|OP|$.



Eine zweite Möglichkeit ist vielleicht noch deutlicher:
Diese verwendet Dürers Spinnenlini-Konstruktion.
Mit $|OA| = |BC| = \frac{1}{2}b$ und $|AB| = a$ und Winkelgleichheit $\angle OAB$ mit $\angle ABC$ ergibt sich die Pascalsche Schnecke. Mit M als Mittelpunkt von AB und gleichzeitig Mittelpunkt des Kreises durch O sind die Dreiecke CAM und MBC kongruent, also ist tatsächlich $|OM| = |MC|$, und der Kreis geht auch durch C.

Fortsetzung auf Folgeseite.

Weiterhin ist zu zeigen, daß die Tangente in P an den Kreis um K durch P und O der Tangente der Kurve in P gleicht. Das ist genau dann der Fall, wenn der Richtungsvektor der Kurve senkrecht zu KP ist.



Der Richtungsvektor von P bei Veränderung von φ ist die Ableitung von $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} (a\cos\varphi + b)\cos\varphi \\ (a\cos\varphi + b)\sin\varphi \end{pmatrix}$ nach φ, also $\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{d\varphi}$.

Der Ortsvektor des Kreispunkts berechnet sich mit

$\overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\cos\varphi \\ \frac{1}{2}b\sin\varphi \end{pmatrix}$, denn $M(\frac{1}{2}a \mid 0)$ und $r = \frac{1}{2}b$ (siehe oben).

Ich zeige nun, daß $\overrightarrow{KP}$ orthogonal zu dieser Richtung ist.

Zunächst die Ableitung. Man macht das komponentenweise (x- und y-Komponente separat).

Mit Anwendung der Produktregel und Verwendung von $\sin^2 = 1 - \cos^2$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{OP}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi\cos\varphi - (a\cos\varphi + b)\sin\varphi \\ -a\sin^2\varphi + (a\cos\varphi + b)\cos\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a\sin\varphi\cos\varphi - a\sin\varphi\cos\varphi - b\sin\varphi \\ -a\sin^2\varphi + a\cos^2\varphi + b\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2a\sin\varphi\cos\varphi - b\sin\varphi \\ -a(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) + b\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2a\sin\varphi\cos\varphi - b\sin\varphi \\ -a((1-\cos^2\varphi) - \cos^2\varphi) + b\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2a\sin\varphi\cos\varphi - b\sin\varphi \\ 2a\cos^2\varphi + b\cos\varphi - a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun ist $\overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\cos\varphi \\ \frac{1}{2}b\sin\varphi \end{pmatrix}$, und somit

$$\overrightarrow{KP} = \begin{pmatrix} (a\cos\varphi + b)\cos\varphi \\ (a\cos\varphi + b)\sin\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\cos\varphi \\ \frac{1}{2}b\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos^2\varphi + \frac{1}{2}b\cos\varphi - \frac{1}{2}a \\ a\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}b\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal, wenn deren Skalarprodukt 0 ist.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -2a\sin\varphi\cos\varphi - b\sin\varphi \\ 2a\cos^2\varphi + b\cos\varphi - a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a\cos^2\varphi + \frac{1}{2}b\cos\varphi - \frac{1}{2}a \\ a\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}b\sin\varphi \end{pmatrix} = \\
&\quad = (-2a\sin\varphi\cos\varphi - b\sin\varphi)(a\cos^2\varphi + \tfrac{1}{2}b\cos\varphi - \tfrac{1}{2}a) + (2a\cos^2\varphi + b\cos\varphi - a)(a\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{2}b\sin\varphi) \\
&\qquad \text{Zur besseren Übersicht: } c := \cos\varphi \quad s := \sin\varphi \\
&\quad = (-2acs - bs)(ac^2 + \tfrac{1}{2}bc - \tfrac{1}{2}a) + (2ac^2 + bc - a)(acs + \tfrac{1}{2}bs) \\
&\quad = \underset{(1)}{-2a^2c^3s} \underset{(2)}{-abc^2s} \underset{(3)}{+a^2cs} \underset{(4)}{-abc^2s} \underset{(5)}{-\tfrac{1}{2}b^2cs} \underset{(6)}{+\tfrac{1}{2}abs} \;+\; \underset{(1)}{2a^2c^3s} \underset{(2)}{+abc^2s} \underset{(4)}{+abc^2s} \underset{(5)}{+\tfrac{1}{2}b^2cs} \underset{(3)}{-a^2cs} \underset{(6)}{-\tfrac{1}{2}abs} \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

Da nun P stets auf der Pascalschen Schnecke liegt und deren Richtung bei Zunahme von φ genau der Richtung der Kurve bei gleicher Zunahme von φ entspricht, zeichnen die Punkte P sozusagen genau die Kurve nach, oder besser: Die Ortslinie der Punkte P ist genau die Pascalsche Schnecke.