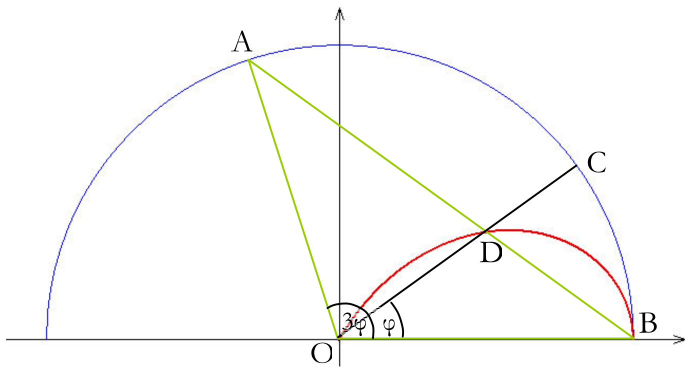
Die Pascalsche Schnecke mit a=2b als Trisektrix

© Arndt Brünner, Oktober 2024



Einem halben Einheitskreis sei ein gleichschenkliges Dreieck OAB so einbeschrieben, daß A und B auf dem Halbkreis liegen und O im Ursprung. B liege auf der x-Achse. Der Winkel in der Spitze O betrage 3φ.

C sei ein weiterer Kreispunkt, wobei die Strecke OC um φ gegen die x-Achse gedreht ist, also ein Drittel von OA.

Es ist somit $A(\cos(3\varphi)\,|\,\sin(3\varphi))$; $B(1\,|\,0)$; $C(\cos(\varphi)\,|\,\sin(\varphi))$. Es gelte $0 < \varphi < 3\varphi < \pi$ (=180°)

D sei der Schnittpunkt der Strecken AB und OC.

Behauptung:

D liegt auf der inneren Schleife der Pascalschen Schnecke mit $b = 1$ und $c = 2$ (d.h. auch $a = 2b$). Das hat zur Folge, daß man umgekehrt mittels der inneren Schleife der Pascalschen Schnecke einen Winkel dritteln kann.

Beweis:

Der obere Teil der inneren Schleife der Pascalschen Schnecke mit der allgemeinen Polargleichung $r = a\cdot\cos(\varphi) + b$, hier also $r = 2\cos(\varphi) + 1$, wird gebildet durch $\varphi \in [\pi; \frac{4}{3}\pi]$ (180° bis 240°). Hierbei ist überall $r \leq 0$. Eine vektorielle Darstellung des Ortsvektors von D (sofern er, wie angenommen, auf der Pascalschen Schneckenlienie liegt) erhält man also durch $\overrightarrow{OD} = -(2\cos(\varphi+\pi)+1)\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$.

Wegen $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ ist das: $\overrightarrow{OD} = (2\cos(\varphi)-1)\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$.

Ich zeige, daß der Punkt in dieser Darstellung sowohl auf OC als auch AB liegt.

(1) Schnitt mit der Geraden OC, die die Parameterform $\vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$ hat:

$$(2\cos(\varphi)-1)\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$$

Das ist offensichtlich richtig für $\lambda = 2\cos(\varphi) - 1$.

(2) Schnitt mit der Geraden AB, die die Parameterform $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}\cos(3\varphi)\\ \sin(3\varphi)\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1-\cos(3\varphi)\\ -\sin(3\varphi)\end{pmatrix}$ hat:

$$(2\cos(\varphi)-1)\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(3\varphi)\\ \sin(3\varphi)\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1-\cos(3\varphi)\\ -\sin(3\varphi)\end{pmatrix}$$

Die beiden Gleichungen für die x- und die y-Komponente werden nach μ aufgelöst; wenn der gleiche Wert herauskommt, ist die Punktprobe bestanden. (Schwierig ist dabei nicht das Auflösen an sich, sondern das Vereinfachen der trigonometrischen Terme.)

Ich verwende dabei u.a. diese trigonometrischen Identitäten

$\cos(3x) = 4\cdot\cos^3(x) - 3\cdot\cos(x)$
$\sin(3x) = 3\cdot\sin(x) - 4\cdot\sin^3(x)$
$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

Für die x-Komponente:

$$(2\cos(\varphi)-1)\cos(\varphi)=\cos(3\varphi)+(1-\cos(3\varphi))\cdot\mu$$

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{2\cos^2(\varphi)-\cos(\varphi)-\cos(3\varphi)}{1-\cos(3\varphi)}\\
&= \frac{2\cos^2(\varphi)-\cos(\varphi)-(4\cos^3(\varphi)-3\cos(\varphi))}{1-(4\cos^3(\varphi)-3\cos(\varphi))}\\
&= \frac{2\cos^2(\varphi)+2\cos(\varphi)-4\cos^3(\varphi)}{1-4\cos^3(\varphi)+3\cos(\varphi)}\\
&= \frac{2\cos^2(\varphi)+2\cos(\varphi)-4\cos^3(\varphi)}{1-4\cos^3(\varphi)+3\cos(\varphi)}\\
&= \frac{2\cos(\varphi)(\cos(\varphi)+1-2\cos^2(\varphi))}{(1+2\cos(\varphi))(1-2\cos^2(\varphi)+\cos(\varphi))}\\
&= \frac{2\cos(\varphi)}{1+2\cos(\varphi)}
\end{aligned}$$

Für die y-Komponente:

$$(2\cos(\varphi)-1)\sin(\varphi)=\sin(3\varphi)-\sin(3\varphi)\cdot\mu$$

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)-\sin(\varphi)-\sin(3\varphi)}{-\sin(3\varphi)}\\
&= \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)-\sin(\varphi)-(3\sin(\varphi)-4\sin^3(\varphi))}{-(3\sin(\varphi)-4\sin^3(\varphi))}\\
&= \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)-4\sin(\varphi)+4\sin^3(\varphi)}{4\sin^3(\varphi)-3\sin(\varphi)}\\
&= \frac{2\cos(\varphi)-4+4\sin^2(\varphi)}{4\sin^2(\varphi)-3}\\
&= \frac{2\cos(\varphi)-4+4(1-\cos^2(\varphi))}{4(1-\cos^2(\varphi))-3}\\
&= \frac{2\cos(\varphi)-4\cos^2(\varphi)}{1-4\cos^2(\varphi)}\\
&= \frac{2\cos(\varphi)(1-2\cos(\varphi))}{(1+2\cos(\varphi))(1-2\cos(\varphi))}\\
&= \frac{2\cos(\varphi)}{1+2\cos(\varphi)}
\end{aligned}$$

D liegt also sowohl auf AB als auch auf OC, womit die Behauptung bewiesen ist.