Lokalisation eines Ebenenpunktes
als Schnittpunkt dreier Kreise mit bekannten Mittelpunkten und bekannten Radiendifferenzen

Es seien drei Punkte $A(x_1|y_1)$, $B(x_2|y_2)$ und $C(x_3|y_3)$ bekannt, als Mittelpunkte dreier Kreise, die sich in einem Punkt $P(x|y)$ schneiden sollen und für die nur die Differenzen der Radien bekannt seien ($b:=r_B-r_A$ und $c:=r_C-r_A$), aber kein Radius selbst. Gesucht sind die konkreten Radien sowie die Koordinaten von P.

Für die drei Kreise und den gemeinsamen Schnittpunkt P gelten dann diese Gleichungen:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2 \qquad \text{(I)}$$
$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=(r+b)^2 \qquad \text{(II)}$$
$$(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=(r+c)^2 \qquad \text{(III)}$$

Subtrahiert man von II und III jeweils I, ergibt sich:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2 \qquad \text{(I)}$$
$$2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y+x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2=2br+b^2 \qquad \text{(II' := II–I)}$$
$$2(x_1-x_3)x+2(y_1-y_3)y+x_3^2-x_1^2+y_3^2-y_3^2=2cr+c^2 \qquad \text{(III' := III–I)}$$

II' und III' sind linear in allen drei Unbekannten, das entsprechende LGS kann also z.B. für x und y eindeutig, aber (linear) abhängig von r, gelöst werden mit

$$x = (2\,(b\,k_{22}-c\,k_{12})\,r + k_{12}\,k_{23}-k_{13}k_{22})/(k_{11}\,k_{22}-k_{12}\,k_{21})$$
$$y = (2\,(b\,k_{21}-c\,k_{11})\,r + k_{11}\,k_{23}-k_{13}k_{21})/(k_{12}\,k_{21}-k_{11}\,k_{22}),$$

worin mit $k_{11}=2\,(x_1-x_2)$, $k_{21}=2(x_1-x_3)$, $k_{12}=2\,(y_1-y_2)$, $k_{22}=2\,(y_1-y_3)$,
$k_{13}=x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2-b^2$ und $k_{23}=x_3^2-x_1^2+y_3^2-y_1^2-c^2$
substituiert wird.

Wenn man das in I einsetzt, ergibt sich eine quadratische Gleichung für r.

Mit den Substitutionen

$$k_{31}=2\,(b\,k_{22}-c\,k_{12}),\ \ k_{32}=k_{12}\,k_{23}-k_{13}\,k_{22},\ \ k_{33}=k_{11}\,k_{22}-k_{12}\,k_{21},$$
$$k_{41}=2\,(b\,k_{21}-c\,k_{11}),\ \ k_{42}=k_{11}\,k_{23}-k_{13}\,k_{21},\ \ k_{43}=k_{12}\,k_{21}-k_{11}\,k_{22}$$

ist in der auf Standardform gebrachten Gleichung $r^2+p\,r+q=0$:

$$p=2\,(k_{31}\,k_{43}^2\,(k_{32}-k_{33}\,x_1)+k_{33}^2\,k_{41}\,(k_{42}-k_{43}\,y_1))/(k_{31}^2\,k_{43}^2+k_{33}^2\,(k_{41}^2-k_{43}^2))$$
$$q=(k_{32}^2\,k_{43}^2-2\,k_{32}\,k_{33}\,k_{43}^2\,x_1+k_{33}^2\,(k_{42}^2-2\,k_{42}\,k_{43}\,y_1+k_{43}^2\,(x_1^2+y_1^2)))/(k_{31}^2\,k_{43}^2+k_{33}^2\,(k_{41}^2-k_{43}^2))$$

und damit errechnen sich:

$$r=-\tfrac{p}{2}\pm\sqrt{\tfrac{p^2}{4}-q} \quad \text{(die „–“-Lösung kann meist wegen } r<0 \text{ verworfen werden),}$$
$$x=(k_{31}\,r+k_{32})/k_{33}$$
$$y=(k_{41}\,r+k_{42})/k_{43}$$

Konkret kann also alles nacheinander formelhaft berechnet werden.