

Wie man Wurzelgleichungen löst

Unter einer Wurzelgleichung versteht man eine Gleichung, bei der die Variable unter einer Quadratwurzel steht (und möglicherweise zusätzlich auch außerhalb der Wurzel).

Im folgenden verwende ich immer x als Variable.

Beispiele für Wurzelgleichungen:

$$(a) \quad \sqrt{2x+1} = x - 17$$

$$(b) \quad \frac{5-x}{\sqrt{x^2-5x-7}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$(c) \quad \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{6}$$

$$(d) \quad \sqrt{8x+1} + 2x = 4x - 11$$

Beispiele für Gleichungen, die keine Wurzelgleichungen sind, obwohl sie Wurzeln enthalten:

$$(d) \quad \frac{\sqrt{3}}{3x} + x = \sqrt{5} \cdot (x - \sqrt{2} \cdot x + 1)$$

$$(e) \quad \frac{x - \sqrt{4a+1}}{x^2 - a} = (\sqrt{5} - a)^2$$

In der Gleichung (e) kommt zwar unter der Wurzel $\sqrt{4a+1}$ mit a eine Unbekannte vor, doch es handelt sich dabei nicht um die Variable x , sondern um einen sogenannten Parameter, der irgendeine Zahl repräsentiert, die man später konkret für a einsetzen kann.

Beim Lösen von Gleichungen versucht man ja stets, die Variable auf die eine Seite zu bringen und die Zahlen auf die andere. Dazu muß die Variable oftmals zuerst „befreit“ werden, z. B. aus Klammern, aus Produkten, aus Summen, aus Brüchen oder eben auch aus Wurzeln. Man schafft das, indem man auf die Gleichung schrittweise immer das „Gegenteil“ dessen anwendet, was das x gerade „fesselt“.

Bei Wurzelgleichungen ist dieses „Gegenteil“ der Wurzel, unter der das x gefangen ist, natürlich das Quadrieren. Allerdings muß man beim Quadrieren vorsichtig sein: Es handelt sich nämlich nicht um eine Äquivalenzumformung. Ein einfaches Beispiel zeigt das:

Die Gleichung $x-1=2$ hat die Lösungsmenge $L=\{3\}$. $x=3$ ist die einzige Lösung. Wenn man sie quadriert: $(x-1)^2=4$, ist $x=3$ zwar noch eine Lösung, wie Einsetzen und Nachrechnen zeigt, denn $(3-1)^2=4$ ist offensichtlich korrekt. Man erhält aber als zusätzliche Lösung noch $x=-1$. Denn $(-1-1)^2=4$ ist auch korrekt. Der wunde Punkt liegt offensichtlich darin, daß man beim Quadrieren die Information über die Vorzeichen verliert, denn das Quadrieren macht alles positiv. Anders formuliert: Es ist dem Quadrat egal, ob das, was es quadriert, vorher positiv oder negativ war.

Man bekommt also durch das Quadrieren u. U. neue Lösungen hinzu, die die ursprüngliche Gleichung nicht hatte. Hingegen gehen keine Lösungen verloren. Damit ist das Quadrieren zwar keine Äquivalenzumformung, aber dennoch ein geeignetes Mittel, um Wurzelgleichungen zu knacken. Allerdings muß man am Schluß alle Lösungen überprüfen, und zwar durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung, also durch die gewöhnliche Probe.

Versuchen wir also, die **Gleichung (a)** durch Quadrieren zu lösen.

$$\sqrt{2x+1} = x - 17$$

| quadrieren

$$2x+1 = (x-17)^2$$

| Binom ausmultiplizieren

$$2x+1 = x^2 - 34x + 289$$

| $-2x - 1$

$$0 = x^2 - 36x + 288$$

| pq-Formel anwenden:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$



Das ist die pq-Formel.

p ist der Faktor vor x (mit Vorzeichen), hier also -36 ,
 q ist die einzelne Zahl (mit Vorzeichen), hier also $+288$

$$x_{1,2} = -\frac{-36}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-36}{2}\right)^2 - 288}$$

$$= 18 \pm \sqrt{324 - 288}$$

$$= 18 \pm \sqrt{36} = 18 \pm 6$$

$$x = 12 \quad \text{oder} \quad x = 24$$

Kleiner Tip: $-p \div 2$ gleich ausrechnen [hier $18 = -(-36) \div 2$] und in die Wurzel als erstes das Quadrat davon schreiben [$324 = 18^2$].

$x=12$ bzw. $x=24$ sind die Lösungen der Gleichung $2x + 1 = (x - 17)^2$. Das ist aber nicht die Gleichung, die gelöst werden soll, sondern deren quadrierte Fassung. Die Lösungen müssen noch an der ursprünglichen Gleichung durch Einsetzen überprüft werden.

Die Probe in der Ursprungsgleichung ergibt, daß $x=12$ *keine* Lösung ist, denn

$$\begin{aligned}\sqrt{2 \cdot 12 + 1} &= 12 - 17 \\ \sqrt{25} &= -5 \\ 5 &= -5 \quad \text{ist falsch}\end{aligned}$$

$x=24$ ist eine Lösung, denn:

$$\begin{aligned}\sqrt{2 \cdot 24 + 1} &= 24 - 17 \\ \sqrt{49} &= 7 \\ 7 &= 7 \quad \text{ist wahr.}\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{2x+1} = x - 17$ ist damit $L = \{24\}$.

Auch bei **Gleichung (b)** führt das Quadrieren sofort dazu, daß die Wurzeln verschwinden:

$$\begin{aligned}\frac{5-x}{\sqrt{x^2-5x-7}} &= -\frac{\sqrt{91}}{13} && | \text{quadrieren} \\ \frac{(5-x)^2}{x^2-5x-7} &= \frac{91}{169} && | \text{links Binom auflösen, rechts mit 13 kürzen} \\ \frac{25-10x+x^2}{x^2-5x-7} &= \frac{7}{13} && | \text{mit den Nennern multiplizieren,} \\ &&& | \text{um die Brüche zu beseitigen} \\ 13(25-10x+x^2) &= 7(x^2-5x-7) && | \text{Klammern ausmultiplizieren} \\ 325-130x+13x^2 &= 7x^2-35x-49 && | \text{alles nach links bringen } (-7x^2, +35x, +49) \\ 6x^2-95x+374 &= 0 && | :6 \\ x^2-\frac{95}{6}x+\frac{187}{3} &= 0 && | \text{pq-Formel anwenden: } p=-\frac{95}{6} \quad q=\frac{187}{3} \\ x &= \frac{95}{12} \pm \sqrt{\frac{9025}{144} - \frac{187}{3}} \\ x &= \frac{95}{12} \pm \sqrt{\frac{9025}{144} - \frac{8976}{144}} \\ x &= \frac{95}{12} \pm \sqrt{\frac{49}{144}} \\ x &= \frac{95}{12} \pm \frac{7}{12} \\ x &= \frac{88}{12} = \frac{22}{3} \quad \text{oder} \quad x = \frac{102}{12} = \frac{17}{2}\end{aligned}$$

Das Überprüfen gestaltet sich hier leider „etwas“ schwierig, muß aber sein (siehe nächste Seite).

Überprüfung für $x = \frac{22}{3}$

$$\frac{5 - \frac{22}{3}}{\sqrt{\left(\frac{22}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{22}{3} - 7}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$\frac{\frac{15}{3} - \frac{22}{3}}{\sqrt{\frac{484}{9} - \frac{110}{3} - 7}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$\frac{\frac{15}{3} - \frac{22}{3}}{\sqrt{\frac{484}{9} - \frac{330}{9} - \frac{63}{9}}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$\frac{-\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{91}{9}}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$\frac{-\frac{7}{3}}{\frac{\sqrt{91}}{3}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$\frac{-7}{\sqrt{91}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$-7 \cdot 13 = -\sqrt{91} \cdot \sqrt{91}$$

$$-91 = -91$$

für $x = \frac{17}{2}$

$$\frac{5 - \frac{17}{2}}{\sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{17}{2} - 7}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$\frac{\frac{10}{2} - \frac{17}{2}}{\sqrt{\frac{289}{4} - \frac{85}{2} - 7}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$\frac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{289}{4} - \frac{170}{4} - \frac{28}{4}}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$\frac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{91}{4}}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$\frac{-\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{91}}{2}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$\frac{-7}{\sqrt{91}} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$-7 \cdot 13 = -\sqrt{91} \cdot \sqrt{91}$$

$$-91 = -91$$

Beide Lösungen stimmen! $L = \left\{ \frac{22}{3}; \frac{17}{2} \right\}$

(Das hat damit zu tun, daß auf der rechten Seite der Gleichung kein x steht und diese Seite negativ ist.)

Gleichung (c) sieht nicht so schwierig aus, stellt uns aber vor neue Probleme:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{6} \quad | \text{quadrieren}$$

$$\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}\right)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 \quad | \text{links das Binom, rechts die quadrierte Wurzel auflösen}$$

$$(x+1) + 2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2-x} + (2-x) = 6 \quad | \text{Plus-Klammern auflösen (einfach weglassen)}$$

$$x+1 + 2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2-x} + 2-x = 6 \quad | \text{zusammenfassen}$$

$$2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2-x} + 3 = 6$$

Hier verschwinden die Wurzeln durch das Quadrieren offensichtlich nicht.

Nun muß man die Wurzel auf einer Seite der Gleichung isolieren und nochmal quadrieren.

$$2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2-x} + 3 = 6 \quad | -3$$

$$2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2-x} = 3 \quad | :2$$

$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2-x} = 1,5 \quad | \text{quadrieren}$$

$$\begin{array}{ll}
(x+1)(2-x) = 2,25 & | \text{ ausmultiplizieren} \\
-x^2 + x + 2 = 2,25 & | -2,25 \\
-x^2 + x - 0,25 = 0 & | \cdot (-1) \\
x^2 - x + 0,25 = 0 & | \text{ pq-Formel} \\
x = 0,5 \pm \sqrt{0,25 - 0,25} \Rightarrow x = 0,5 &
\end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{0,5+1} + \sqrt{2-0,5} = \sqrt{6} \\
\sqrt{1,5} + \sqrt{1,5} = \sqrt{6} \\
2\sqrt{1,5} = \sqrt{4 \cdot 1,5} \\
2\sqrt{1,5} = 2\sqrt{1,5} \quad \text{stimmt. Damit ist } L = \{0,5\}
\end{array}$$

Die Gleichung (d):

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{8x+1} + 2x = 4x - 11 & | \text{ Zuerst mit } -2x \text{ die Wurzel isolieren} \\
\sqrt{8x+1} = 2x - 11 & | \text{ Nun quadrieren} \\
8x + 1 = (2x - 11)^2 & | \text{ Das Binom ausmultiplizieren} \\
8x + 1 = 4x^2 - 44x + 121 & | \text{ Zusammenfassen} \\
0 = 4x^2 - 52x + 120 & | \text{ Durch 4 dividieren und die Seiten tauschen} \\
x^2 - 13x + 30 = 0 & | \text{ pq-Formel anwenden} \\
x = 6,5 \pm \sqrt{42,25 - 30} = 6,5 \pm \sqrt{12,25} = 6,5 \pm 3,5 \\
x = 3 \quad \text{oder} \quad x = 10
\end{array}$$

Proben:

$$\begin{array}{ll}
x = 3 & x = 10 \\
\sqrt{24+1} + 6 = 12 - 11 & \sqrt{80+1} + 20 = 40 - 11 \\
\sqrt{25} + 6 = 1 & \sqrt{81} + 20 = 29 \\
11 = 1 & 29 = 29
\end{array}$$

$x = 10$ ist die einzige Lösung, $L = \{10\}$.

Zusammenfassung

Bei Wurzelgleichungen steht die Variable immer unter einer Wurzel, u.U. zusätzlich auch außerhalb.

Lösungsverfahren:

- (1) die Wurzel wird (die Wurzeln werden) auf einer Seite der Gleichung isoliert
- (2) die Gleichung wird quadriert
- (3) ist jetzt noch eine Wurzel, unter der die Variable steht, enthalten, ab (1) wiederholen
- (4) die Gleichung nach x auflösen, bzw. nach bekannten Verfahren lösen (z.B. pq-Formel anwenden)
- (5) alle erhaltenen Lösungen an der ursprünglichen Gleichung prüfen, da durch Schritt (2) zusätzliche, „falsche“ Lösungen entstehen können.

Wurzelgleichungen können keine, eine oder auch mehrere Lösungen haben.